

Врз основа на член 55 став 1 од Законот за организација и работа на органите на државната управа управа („Службен весник на Република Македонија“ бр. 58/00, 44/02, 82/08, 167/10, 51/11 и „Службен весник на Република Северна Македонија“ бр. 96/2019 и 110/2019) и член 22 став 1 од Закон за средното образование („Службен весник на Република Македонија“ бр. 44/95, 24/96, 34/96, 35/97, 82/99, 29/02, 40/03, 42/03, 67/04, 55/05, 113/05, 35/06, 30/07, 49/07, 81/08, 92/08, 33/10, 116/10, 156/10, 18/11, 42/11, 51/11, 6/12, 100/12, 24/13, 41/14, 116/14, 135/14, 10/15, 98/15, 145/15, 30/16, 127/16, 67/17, 64/18 и „Службен весник на Република Северна Македонија“ бр. 229/20) и член 3 од Закон за математичко-информатичка гимназија („Службен весник на Република Македонија“ бр. 64/18) министерот за образование и наука ја донесе Наставната програма по **веројатност и статистика** за IV (четврта) година изборен предмет во математичко-информатичка гимназија.

МИНИСТЕРСТВО ЗА ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА

БИРО ЗА РАЗВОЈ НА ОБРАЗОВАНИЕТО



Наставна програма

ВЕРОЈАТНОСТ И СТАТИСТИКА

ИЗБОРЕН ПРЕДМЕТ

за IV година

Математичко-информатичка гимназија

Скопје, 2023 година

Назив на наставната програма	Веројатност и статистика
Тип на наставна програма	Изборна
Кредитна вредност на наставната програма	5 (пет) ЕЦВЕТ ¹ кредити
Ниво на квалификација	IV (четврто) ниво
Година на изучување	IV (четврта)
Број на часови неделно/годишно за реализација на наставната програма	3/99
Цели на наставна програма	<p>Ученикот/ученичката:</p> <ul style="list-style-type: none"> - да ги продлабочи знаењата по веројатност и статистика, односно случајни настани, случајни променливи, нивните бројни карактеристики, законот на големи броеви, статистичките поими популација и примерок, поставувањето и проверката на статистичките хипотези и основите на линеарната регресија и истите да ги применува во секојдневни ситуации, како и во други наставни предмети; - да постигне самодоверба во примената на стекнатите математички вештини за наоѓање, користење и презентирање на математичките аргументи; - да ја цени убавината, моќта, корисноста и интернационалната димензија на математиката и да извлекува задоволство од постигнатите резултат; - да развива логичко, критичко и креативно математичко мислење.

¹Закон за Националната рамка на квалификации.

<p>Теми/подрачја/модуларни единици на наставната програма</p>	<ul style="list-style-type: none"> • СЛУЧАЈНИ НАСТАНИ • СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ • БРОЈНИ КАРАКТЕРИСТИКИ НА СЛУЧАЈНА ПРОМЕНЛИВА • ЗАКОН НА ГОЛЕМИ БРОЕВИ • ПОПУЛАЦИЈА И ПРИМЕРОК • ПРОВЕРКА НА СТАТИСТИЧКИ ХИПОТЕЗИ • ЛИНЕАРНА РЕГРЕСИЈА
<p>Материјално-технички и просторни услови</p>	<p>За постигнување на целите на наставата по <i>математика</i> неопходно е стручно осмислена и планирана примена на различни наставни средства, слики и цртежи, како и помагала: компјутер со соодветни програмски пакети, интернет и ЛЦД проектор.</p>
<p>Норматив на наставен кадар</p>	<p>Наставната програма за I година може да ја реализира:</p> <ul style="list-style-type: none"> - наставник со завршени студии по математика/наставна или друга насока, VII/1 или VIA според МРК и 240 ЕКТС; <p>Стручно лице кое исполнува најмалку еден од следните услови:</p> <ul style="list-style-type: none"> - да бил ментор на ученик кој бил награден на престижен меѓународен натпревар од соодветната област; - да е запишан на докторски студии соодветната област; - да има стекнато научен степен на доктор на науки на соодветната област.

СЛУЧАЈНИ НАСТАНИ (21 часа)				
Ред. број	Резултати од учењето	Содржини и поими	Активности и методи	Стандарди за оценување
1	<p>Ученикот/ученичката ќе биде способен/на:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Дефинира експеримент и случаен настан - Да врши операции со случајни настани - Да решава задачи со примена на класичната дефиниција на веројатност - Да решава задачи со примена на геометриска веројатност - Да решава задачи со примена на веројатноста во статистика 	<ul style="list-style-type: none"> • Експерименти и настани. Простор на елементарни настани (1 час) • Операции со случајни настани (1 час) • Повторување за класична дефиниција на веројатност низ примери (на еднакво веројатни елементарни настани) - роденден во ист ден: (1) за барем двајца во група, (2) „близнак“ за конкретен претставник од група - де-аранжирање (проблем на misaddressed letters) - веројатност за добивање конкретна „рака“ во покер (2 часа) • Примери со нееднакво веројатни елементарни настани - хомогена(и) коцка(и) чии страни не се означени различно (1 час) • Веројатносен модел со преброиво многу елементарни настани низ примери 	<p>Активности</p> <ul style="list-style-type: none"> • Наставникот дефинира елементарни настани, а учениците низ примери ги согледуваат операциите и статистичката дефиниција на веројатноста • Низ групна работа учениците изведуваат заклучоци за операциите со случајни настани, нивните својства, калсичната дефиниција на веројатноста • Со помош на техниките за активна настава учениците се запознаваат со поимот геометриска веројатност и аксиомите на Колмогоров <p>Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.</p>	<p>Ученикот/ученичката може:</p> <p>1.1: да дава примери за елементарни настани, искажува дефиниција за просторот на елементарни настани, класичната, статистичката и геометриската веројатност и аксиомите на Колмогоров</p> <p>1.2: да дава примери за операции со случајни настани, класична и геометриска веројатност</p> <p>1.3: да решава задачи во врска со горе наведените содржини</p> <p>1.4: решава посложени задачи во врска со наведените содржини</p>

		<p>- фрлање паричка или хомогена коцка до прво појавување на одреден настан (1 час)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Статистичко значење на веројатност (1 час) • Геометриска веројатност (2 часа) • Аксиоматика на Колмогоров (1 час) <p>Поими :</p> <p>Предлог-проект: Играта со коцки <i>craps</i></p>		
2	<p>- Да решава задачи со примена на условна веројатност</p> <p>- Да дефинира независни настани и да проверува дали дадени настани се независни</p> <p>- Да решава задачи со примена на Бајесова формула</p> <p>- Да решава задачи со примена на интегрална теорема на Моавр-Лаплас</p> <p>- Да решава задачи со примена на интегрална теорема на Пуасон</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Условна веројатност (2 часа) • Независни настани (2 часа) • Формула за тотална веројатност. Бајесова формула (2 часа) • Серии од независни експерименти. Шема на Бернули (1 час) • Скитање по права <ul style="list-style-type: none"> - симетрично - несиметрично (2 часа) • Интегрална теорема на Моавр-Лаплас. Теорема на Пуасон 	<p>Активности</p> <ul style="list-style-type: none"> • Наставникот ги запознава учениците со поимите условна веројатност, независни настани • Учениците низ групна настава се запознаваат со формулата за тотална веројатност, Бајесовата формула, серии од независни настани и шемата на Бернули • Со помош на техниките за активна настава учениците изведуваат докази на теореме поврзани со поимите (Теоремата на на Моавр-Лаплас, Пуасон) 	<p>2.1: да искажува дефиниција за условна веројатност, независни настани, тотална веројатност, Бајесова формула. Шема на Бернули</p> <p>2.2: да дава примери за условна веројатност, независни настани, тотална веројатност, серии независни експерименти</p> <p>2.3: да решава задачи со примена на наведените содржини</p> <p>2.4: да ги докажува тврдењата од условна веројатност и независност на настани, Бајесовата формула и формулата за тотална веројатност</p>

		(2 часа)	Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.	
	СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ (25 часа)			
Ред. број	Резултати од учењето	Содржини и поими	Активности и методи	Стандарди за оценување
1	<p>Ученикот/ученичката ќе биде способен/на:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Да определува функција на распределба на случајна променлива - Да дефинира дискретна случајна променлива - Да решава задачи со примена на биномна распределба - Да решава задачи со примена на геометриска распределба - Да решава задачи со примена на Паусонова распределба - Да решава задачи со примена на експоненцијална распределба - Да решава задачи со примена на рамномерна распределба - Да решава задачи со примена на Кошиева распределба 	<ul style="list-style-type: none"> • Случајни променливи. Дефиниција и примери (2 часа) • Функција на распределба на случајна променлива (3 часа) • Дискретни случајни променливи <ul style="list-style-type: none"> - индикатор на настани (1 час) - биномна распределба (1 час) - геометриска распределба (1 час) - Пуасонова распределба (2 часа) • Непрекинати случајни променливи <ul style="list-style-type: none"> - Рамномерна распределба (1 час) - Експоненцијална распределба (1 час) - Нормална распределба (1 час) - Кошиева распределба (1 час) 	<p>Активности:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Наставникот дефинира случајна променлива од непрекинат и дискретен тип, а учениците низ групна работа разгледуваат различни типови распределби • Со помош на техниките за активна настава учениците решаваат задачи со примена на различни видови распределби, ги проверуваат своите претпоставки со помош на динамички софтвер, вршат анализа и синтеза на постигнатите знаења <p>Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку</p>	<p>Ученикот/ученичката може:</p> <p>1.1: да искажува дефиниција за случајни променливи и прави разлика меѓу дискретен и непрекинат тип на случајна променлива, да искажува дефиниции за поединечните типови распределби од наставната содржина</p> <p>1.2: да дава примери за различните видови распределби</p> <p>1.3: да решава задачи во врска со функциите на распределба на поединечните видови случајни променливи</p> <p>1.4: да решава посложени задачи од наведените содржини</p>

		Поими: случајна променлива, дискретен тип, непрекинат тип	откривање, решавање проблеми.	
2	<p>- Да дефинира случаен вектор и решава задачи со примена на случаен вектор</p> <p>- Да определува функција на распределба на случаен вектор</p> <p>- Да решава задачи со примена на условна распределба</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Случајни вектори. Дефиниција и примери (4 часа) • Функција на распределба на случаен вектор. Маргинални распределби (2 часа) • Независност. Условна распределба (2 часа) • Функции од случајни променливи (3 часа) <p>Поими: случаен вектор, маргинална распределба, условна распределба</p>	<p>Активности</p> <ul style="list-style-type: none"> • Наставникот дефинира случаен вектор, а учениците низ примери разгледуваат распределба на случаен вектор, независност, условна распределба, маргинални распределби • Преку групна работа учениците разгледуваат својства на функции од случајни променливи, докажуваат тврдења поврзани со распределбите на случајните променливи <p>Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.</p>	<p>2.1: да искажува дефиниција за случаен вектор, функција на распределба на случаен вектор и маргиналните распределби,</p> <p>2.2: да дава примери за случаен вектор, функција на распределба на случаен вектор, да објаснува независност на случајните променливи во векторот и условите распределби</p> <p>2.3: да решава задачи во врска со наведените содржини</p> <p>2.4: да ги докажува својствата за маргиналните и условните распределби и да решава задачи од функции од случајни променливи</p>
БРОЈНИ КАРАКТЕРИСТИКИ НА СЛУЧАЈНА ПРОМЕНЛИВА (10 часа)				
Ред. број	Резултати од учењето	Содржини и поими	Активности и методи	Стандарди за оценување
	Ученикот/ученичката ќе биде способен/на:	• Математичко очекување и својства (3 часа)	Активности	Ученикот/ученичката може:

1	<p>- Да дефинира математичко очекување и решава задачи со примена на својствата на математичко очекување</p> <p>- Да дефинира дисперзија и решава задачи со примена на својствата на дисперзија</p> <p>- Да определува коваријанса и коефициент на корелација на две случајни променливи</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Дисперзија и својства (3 часа) • Моменти (почетен момент, централен момент, и од повисок ред) (2 часа) • Коваријанса. Коефициент на корелација (2 часа) <p>Поими: коваријанса, коефициент на корелација.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Наставникот дефинира математичко очекување, дисперзија, моменти(почетен, централен, од повисок ред), коваријанса и коефициент на корелација • Учениците разгледуваат својства поврзани со наведените поими, воочуваат врски, разгледуваат ситуации, изведуваат заклучоци и користа динамички софтвер со кој ги проверуваат претпоставките <p>Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.</p>	<p>1.1: да искажува дефиниција за математичко очекување, дисперзија, моменти, коваријанса и коефициент на корелација на случајна променлива</p> <p>1.2: да дава примери за наведените бројни карактеристики</p> <p>1.3: да решава задачи за одредување бројни карактеристики на случајни променливи од различни типови</p> <p>1.4: да ги докажува својствата на наведените бројни карактеристики</p>
ЗАКОН ЗА ГОЛЕМИ БРОЕВИ (11 часа)				
Ред. број	Резултати од учењето	Содржини и поими	Активности и методи	Стандарди за оценување
1	<p>Ученикот/ученичката ќе биде способен/на:</p> <p>- Да го применува во задачи класичното неравенство на Чебишев</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Конвергенција по веројатност (1 час) • Класично неравенство на Чебишев (2 часа) • Неравенство на Марков (2 часа) 	<p>Активности</p> <ul style="list-style-type: none"> • Наставникот дефинира конвергенција по веројатност и некои поважни неравенства и теореми 	<p>Ученикот/ученичката може:</p> <p>1.1: да искажува дефиниција за конвергенција по веројатност, да ги формулира неравенствата на Чебишев и Марков и централната гранична теорема</p>

	<ul style="list-style-type: none"> - Да го применува во задачи класичното неравенство на Марков - Да решава задачи со примена на теоремата на Чебишев - Да решава задачи со примена на централната гранична теорема 	<ul style="list-style-type: none"> • Закон за големи броеви - Теорема на Чебишев (2 часа) - Централна гранична теорема (формулација и примена) (4 часа) <p>Поими: конвергенција по веројатност, закон за големи броеви, централна гранична теорема</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Со помош на техниките за активна настава учениците разгледуваат примери, изведуваат докази, прават анализа и се оспособуваат за примена на централната гранична теорема • Низ групна настава учениците разгледуваат примери од секојдневието кои се сведуваат на задачи поврзани со поимите кои ги изучуваат <p>Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.</p>	<p>1.2: да дава примери за конвергенција по веројатност, да објаснува за класичното неравенство на Чебишев, неравенството на Марков и централната гранична теорема</p> <p>1.3: да решава задачи од примена на наведените содржини во проблеми од секојдневен живот</p> <p>1.4: да ги докажува неравенствата на Чебишев, Марков и теоремата на Чебишев</p>
ПОПУЛАЦИЈА И ПРИМЕРОК (12 часа)				
Ред. број	Резултати од учењето	Содржини и поими	Активности и методи	Стандарди за оценување
1	<p>Ученикот/ученичката ќе биде способен/на:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Да дефинира популација, обележје и примерок - Да определува фреквенција - Да решава задачи со примена на геометриско претставување на податоци 	<ul style="list-style-type: none"> • Популација. Обележје. Примерок (1 час) • Претставување на статистички податоци - Емпириска функција на распределба (1 час) - Фреквенција (1 час) 	<p>Активности</p> <ul style="list-style-type: none"> • Наставникот низ примери ги запознава учениците со основните поими поврзани со претставување и анализирање на статистички податоци • Низ групна работа учениците се оспособуваат за одредување 	<p>Ученикот/ученичката може:</p> <p>1.1: да искажува дефиниција за популација, примерок, емпириска функција на распределба и мерките на примерокот</p> <p>1.2: да дава примери за горе наведените содржини</p>

	<p>- Да решава задачи со примена на својствата на аритметичка средина на примерок</p> <p>- Да определува дисперзија на примерок</p>	<p>- Геометриско претставување на податоци (2 часа)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Аритметичка средина на примерок и својства (4 часа) • Дисперзија на примерок (3 часа) <p>Поими: емпириска функција на распределба</p> <p>Предлог-проект: користење на статистички софтвер во анализа на примерокот</p>	<p>на бројните карактеристики на разгледуван примерок, нивното геометриско претставување, анализа на својствата и заклучоци поврзани со одредени предвидувања врз основа на тие карактеристики</p> <p>Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.</p>	<p>1.3: да решава задачи за претставување на статистичките податоци и бројните карактеристики на примерокот</p> <p>1.4: да изведува заклучоци за предвидувања врз основа на бројните карактеристики на примерокот</p>
ПРОВЕРКА НА СТАТИСТИЧКИ ХИПОТЕЗИ (14 часа)				
Ред. број	Резултати од учењето	Содржини и поими	Активности и методи	Стандарди за оценување
1	<p>Ученикот/ученичката ќе биде способен/на:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Да тестира хипотези за математичко очекување при позната дисперзија - Да тестира хипотези за математичко очекување при непозната дисперзија - Да тестира хипотези за дадена вредност на дисперзија - Да тестира хипотези за закон на распределба 	<ul style="list-style-type: none"> • Хипотези и грешки (2 часа) • Проверка на хипотези за математичко очекување - тест за математичко очекување при позната дисперзија (2 часа) - тест за математичко очекување при непозната дисперзија (2 часа) - тест за еднаквост на математички очекувања (2 часа) 	<p>Активности</p> <ul style="list-style-type: none"> • Наставникот дефинира хипотеза и грешка од прв и втор вид, а учениците разгледуваат ситуации кога дадена хипотеза се прифаќа или отфрла • Со помош на техниките за активна настава учениците се запознаваат со различни типови тестови за проверка на дадени хипотези 	<p>Ученикот/ученичката може:</p> <p>1.1: да ги набројува статистичките хипотези, да ги искажува соодветните тест статистики</p> <p>1.2: да дава примери за различни видови на хипотези за одредена група податоци</p> <p>1.3: да тестира поставени хипотези</p> <p>1.4: да изведува заклучоци врз основа на спроведеното тестирање на хипотезите</p>

	<ul style="list-style-type: none"> - Да применува Пирсонов χ^2 – тест - Да применува тест на Колмогоров 	<ul style="list-style-type: none"> • Проверка на хипотези за дисперзија - Проверка на хипотези за вредност на дисперзија (2 часа) - Проверка на хипотези за еднаквост на дисперзии (2 часа) • Проверка на хипотези за закон на распределба - Пирсонов χ^2 – тест (1 час) - Тест на Колмогоров (формулација и примена) (1 час) <p>Поими: статистички хипотези, тест статистики</p> <p>Предлог-проект: користење на статистички софтвер за тестирање на поставените статистички хипотези</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Со помош на динамички софтвер го разгледуваат процесот на тестирање на хипотезата како и изведувањето заклучоци според даден тест • Преку групна настава учениците прават споредба на различни тетстови со помош на софтвер специјализиран за статистичка анализа на податоци <p>Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.</p>	
ЛИНЕАРНА РЕГРЕСИЈА (6 часа)				
Ред. број	Резултати од учењето	Содржини и поими	Активности и методи	Стандарди за оценување
1	<p>Ученикот/ученичката ќе биде способен/на:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Да определува коефициент на корелација на примерок - Да определува права на регресија на примерок 	<ul style="list-style-type: none"> • Стохастичка зависност (1 час) • Коефициент на корелација на примерок (2 часа) • Права на регресија на примерок (3 часа) 	<p>Активности</p> <ul style="list-style-type: none"> • Наставникот дефинира стохастичка зависност, коефициент на корелација и права на регресија, а учениците низ примери ги совладуваат поимите 	<p>Ученикот/ученичката може:</p> <p>1.1: да искажува дефиниција за стохастичка зависност, коефициент на корелација на примерок и права на линеарна регресија</p>

	<p>- Да решава задачи со примена на стохастичка зависност</p>	<p>Поими: стохастичка зависност, регресија</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Низ групна работа учениците разгледуваат различни примери на податоци за кои се оспособуваат да предвидат тренд на движење со помош на правата на регресија • Со помош на техниките за активна настава учениците се оспособуваат за примена на знаењата во анализа на ситуации од опкружувањето <p>Методи: дискусија, дијалог, демонстрација, учење преку откривање, решавање проблеми.</p>	<p>1.2: да дава примери за групи податоци кои може да се моделираат со линеарна регресија</p> <p>1.3: да решава задачи од наведените содржини</p> <p>1.4: да предвидува тренд на движење на реална појава врз основа на правата на регресија</p>
--	---	---	---	--

<p>Оценување на постигањата на учениците</p>	<p>За да се оценат постигнувањата на ученикот неопходно е:</p> <ul style="list-style-type: none"> - да се согледа иницијалната состојба на ученикот (согледување на неговите претходни искуства, знаење и вештини); - да се разговара со ученикот за да се добијат сознанија за неговото логичко размислување, разбирањето на поими и степенот на разбирање при нивната примена, оспособеноста за решавање задачи; - континуирано следење на односот на ученикот кон работата, соработка со врсниците, покажаната иницијативност, љубопитност, самостојност, точност во искажувањето и истрајност во извршувањето на обврските; - континуирано утврдување и проверка на стекнатите знаења, способности и вештини во модуларните единици. <p>Оценувањето на постигањата на учениците ќе биде со бројна оценка (од 1 до 5). Писменото оценување ќе се врши преку изработка на четири писмени работи по две во секое полугодие.</p>
<p>Литература</p>	<p>За реализација на наставната програма неопходен е учебник одобрен од министер за образование и наука, збирка задачи и други извори.</p>
<p>Почеток на имплементација на наставната програма</p>	<p>Учебна 2023/2024 година</p>
<p>Институција/ носител на програмата</p>	<p>Биро за развој на образованието (БРО)</p>
<p>Потпис и датум на донесување на наставната програма</p>	<p>бр. 13-6691/16 4.7.2023 година</p> <p style="text-align: right;">МИНИСТЕР, Doc.Dr. Jeton Shaqiri</p> <hr style="width: 20%; margin-left: auto; margin-right: 0;"/>
<p>Датум на ревизија</p>	

